3 номер - Д 847

Пример:

$y = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$
$y' = ?$

Решение:

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$$

$y = \dfrac{u}{v}; y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2};$
$u = x; v = (1-x)^2(1+x)^3$

$u' = 1;$
$v = ab; v' = a'b + b'a; a = (1-x)^2; b = (1+x)^3;$
$a' = -2(1-x);$
$b' = 3(1+x)^2$

$v' = (-2(1-x))(1+x)^3 + (1-x)^2 3(1+x)^2$

$$y' = \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[(-2(1-x))(1+x)^3 + (1-x)^2 3(1+x)^2]}{(1-x)^4(1+x)^6} = \frac{4x^2 - x + 1}{(1-x)^3(1+x)^4}$$

7 номер - Д 851

Пример:

$y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
$y' = ?$

Решение:

$y = x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

$(x)' = 1;$
$(x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};$
$(x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};$

$$y' = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

11 номер - Д 855

Пример:

$y = (1+x)\sqrt{2+x^3}\sqrt[3]{3+x^3}$
$y' = ?$

Решение:

$(1+x)\sqrt{2+x^3}\sqrt[3]{3+x^3}$

$y = abc; y' = a'bc + ab'c + abc';$
$a = 1+x;\ b = \sqrt{2+x^3};\ c = \sqrt[3]{3+x^3}$

$a' = 1;$
$b = (2+x^3)^{\frac{1}{2}};\ b' = \dfrac{1}{2}(2+x^3)^{-\frac{1}{2}}(3x^2) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{2+x^3}};$
$c = (3+x^3)^{\frac{1}{3}};\ c' = \dfrac{1}{3}(3+x^3)^{-\frac{2}{3}}(3x^2) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}};$

$$y' = \sqrt{2+x^3}\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\frac{3x^2}{2\sqrt{2+x^3}}\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\sqrt{2+x^3}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$$

15 номер - Д 859

Пример:

$y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$
$y' = ?$

Решение:

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

$y = \dfrac{u}{v};\ y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2};$
$u = 1;\ v = \sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})$

$u' = 0;$
$v = ab;\ v' = a'b + b'a;$
$a = \sqrt{1+x^2};\ b = x+\sqrt{1+x^2}$

$a = (1+x^2)^{\frac{1}{2}};\ a' = \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};$
$b' = 1 + a' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

$$v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = -\frac{\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2}))^2} = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

19 номер - Д 863

Пример:

$y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$
$y' = ?$

Решение:

$(2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

$y = u + v;\ y' = u' + v';$
$u = (2-x^2)\cos x;\ v = 2x\sin x$

$u = ab;\ u' = a'b + b'a;$
$a = 2 - x^2;\ b = \cos x;$
$a' = -2x;$
$b' = -\sin x;$
$u' = (-2x)\cos x + (2-x^2)(-\sin x) = -2x\cos x - (2-x^2)\sin x;$

$v = ab;\ v' = a'b + b'a;$
$a = 2x;\ b = \sin x;$
$a' = 2;$
$b' = \cos x;$
$v' = 2\sin x + 2x\cos x;$

$y' = (-2x\cos x - (2-x^2)\sin x) + (2\sin x + 2x\cos x) = x^2\sin x$

22 номер - Д 866

Пример:

$y = \sin[\sin(\sin x)]$
$y' = ?$

Решение:

$\sin[\sin(\sin x)]$

$y = \sin u;\ y' = \cos u \cdot u';$
$u = \sin(\sin x)$

$u = \sin v;\ u' = \cos v \cdot v';$
$v = \sin x$

$v' = \cos x;$
$u' = \cos(\sin x)\cos x;$
$y' = \cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$

23 номер - Д 867

Пример:

$y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
$y' = ?$

Решение:

$\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

$y = \frac{u}{v};\ y' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$
$u = \sin^2 x;\ v = \sin x^2$

$u = (\sin x)^2;\ u' = 2\sin x \cos x;$
$v = \sin(x^2);\ v' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2);$

$y' = \frac{(2\sin x \cos x)\sin(x^2) - \sin^2 x \cdot (2x\cos(x^2))}{\sin^2(x^2)}$

26 номер - Д 880

Пример:

$y = e^x(1 + \cot\frac{x}{2})$
$y' = ?$

Решение:

$e^x(1 + \cot\frac{x}{2})$

$y = ab;\ y' = a'b + b'a;$
$a = e^x;\ b = 1 + \cot\frac{x}{2}$

$a' = e^x;$
$b' = 0 + (\cot\frac{x}{2})';$
$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
$u = \frac{x}{2};\ u' = \frac{1}{2};$
$(\cot\frac{x}{2})' = -\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})};$

$y' = e^x(1 + \cot\frac{x}{2}) + e^x(-\frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})}) = e^x(1 + \cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})})$

27 номер - Д 881

Пример:

$$y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$$
$$y' = ?$$

Решение:

$$\frac{\ln 3 \sin x + \cos x}{3^x}$$

$$y = \frac{u}{v};\ y' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$u = \ln 3 \sin x + \cos x;\ v = 3^x$$

$$u' = \ln 3 \cos x - \sin x;$$
$$v' = 3^x \ln 3;$$

$$y' = \frac{(\ln 3 \cos x - \sin x)3^x - (\ln 3 \sin x + \cos x)3^x \ln 3}{(3^x)^2}$$
$$y' = \frac{\ln 3 \cos x - \sin x - (\ln 3 \sin x + \cos x) \ln 3}{3^x}$$
$$y' = \frac{- \sin x - (\ln 3)^2 \sin x}{3^x} = -\frac{(1 + (\ln 3)^2) \sin x}{3^x}$$

30 номер - Д 884

Пример:

$$y = (\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a (\frac{x}{a})^b$$
$$y' = ?$$

Решение:

$$(\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a (\frac{x}{a})^b$$

$$y = uvw;\ y' = u'vw + uv'w + uvw';$$
$$u = (\frac{a}{b})^x;\ v = (\frac{b}{x})^a;\ w = (\frac{x}{a})^b$$

$$u = (\frac{a}{b})^x = e^{x \ln(\frac{a}{b})};\ u' = (\frac{a}{b})^x \ln(\frac{a}{b});$$
$$v = (\frac{b}{x})^a = b^a x^{-a};\ v' = -ab^a x^{-a-1} = -\frac{a}{x}(\frac{b}{x})^a;$$
$$w = (\frac{x}{a})^b = x^b a^{-b};\ w' = bx^{b-1} a^{-b} = \frac{b}{x}(\frac{x}{a})^b;$$

$$y' = (\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a (\frac{x}{a})^b (\ln(\frac{a}{b}) - \frac{a}{x} + \frac{b}{x})$$

34 номер - Д 888

Пример:

$y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$
$y' = ?$

Решение:

$\ln(\ln^2(\ln^3 x))$

$y = \ln u;\ y' = \dfrac{u'}{u};$
$u = \ln^2(\ln^3 x) = (\ln(\ln^3 x))^2$

$u = v^2;\ u' = 2vv';$
$v = \ln(\ln^3 x)$
$v = \ln t;\ v' = \dfrac{t'}{t};$
$t = \ln^3 x = (\ln x)^3$

$t = w^3;\ t' = 3w^2w';$
$w = \ln x;\ w' = \dfrac{1}{x};$
$t' = 3(\ln x)^2 \cdot \dfrac{1}{x};$

$v' = \dfrac{3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^3} = \dfrac{3}{x \ln x};$
$u' = 2\ln(\ln^3 x) \cdot \dfrac{3}{x \ln x} = \dfrac{6\ln(\ln^3 x)}{x \ln x};$

$y' = \dfrac{\frac{6\ln(\ln^3 x)}{x \ln x}}{(\ln(\ln^3 x))^2} = \dfrac{6}{x \ln x \cdot \ln(\ln^3 x)}$

38 номер - Д 896

Пример:

$y = x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$
$y' = ?$

Решение:

$x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$

$y = u - v;\ y' = u' - v';$
$u = x\ln(x + \sqrt{1 + x^2});\ v = \sqrt{1 + x^2}$

$u = ab;\ u' = a'b + b'a;$
$a = x;\ b = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
$a' = 1;$

$b = \ln t;\ b' = \dfrac{t'}{t};$
$t = x + \sqrt{1+x^2};$
$t' = 1 + (\sqrt{1+x^2})';$
$(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

$t' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}};$

$b' = \dfrac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};$

$u' = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};$

$v = (1+x^2)^{\frac{1}{2}};\ v' = \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

$y' = (\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

42 номер - Д 900

Пример:

$y = \dfrac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$
$y' = ?$

Решение:

$\dfrac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$y = u + v;\ y' = u' + v';$
$u = \dfrac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2};\ v = 3\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$u = ab;\ u' = a'b + ab';$
$a = \dfrac{2+3x^2}{x^4};\ b = \sqrt{1-x^2}$

$a = (2+3x^2)x^{-4};$
$a' = 6x \cdot x^{-4} + (2+3x^2)(-4)x^{-5} = \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{8+12x^2}{x^5} = -\dfrac{6x^2+8}{x^5};$
$b = (1-x^2)^{\frac{1}{2}};\ b' = \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

$u' = -\dfrac{6x^2+8}{x^5}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2+3x^2}{x^4}(-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}) = -\dfrac{6x^2+8}{x^5}\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2+3x^2}{x^3\sqrt{1-x^2}}$

$v = 3(\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \ln x);$
$v' = 3(\frac{(\sqrt{1-x^2})'}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x});$
$(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

$v' = 3(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} - \frac{1}{x}) = -\frac{3}{x\sqrt{1-x^2}}$

$y' = -\frac{6x^2+8}{x^5}\sqrt{1-x^2} - \frac{2+6x^2}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{6x^2+8}{x^5} \cdot \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(2+6x^2)x^2}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{(6x^2+8)(1-x^2)+}{x^5\sqrt{1-x}}$

46 номер - Д 904

Пример:

$y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$
$y' = ?$

Решение:

$\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$y = \ln((\frac{1-\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1}{2}(\ln(1-\sin x) - \ln(1+\sin x))$

$y' = \frac{1}{2}(\frac{-(\sin x)'}{1-\sin x} - \frac{(\sin x)'}{1+\sin x}) = \frac{1}{2}(-\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x})$
$y' = -\frac{\cos x}{2} \cdot \frac{(1+\sin x)+(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$

50 номер - Д 908

Пример:

$y = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$
$y' = ?$

Решение:

$\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$

$y = u + v;\ y' = u' + v';$
$u = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x};\ v = -\frac{1}{16x^4}$

$$u = \frac{1}{4}ab;\ u' = \frac{1}{4}(a'b + ab');$$
$$a = x^{-4};\ b = \ln\frac{1}{x}$$

$$a' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5};$$
$$b = \ln(x^{-1});\ b' = -(\ln x)' = -\frac{1}{x};$$

$$u' = \frac{1}{4}(-\frac{4}{x^5}\ln\frac{1}{x} + x^{-4}(-\frac{1}{x})) = -\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5}$$
$$v' = -\frac{1}{16}(-4)x^{-5} = \frac{1}{4x^5}$$

$$y' = -\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x}$$

53 номер - Д 963

Пример:

$$y = \sqrt[x]{x}; (x > 0)$$
$$y' = ?$$

Решение:

$$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \ln(x^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}\ln x$$
$$\frac{y'}{y} = (\frac{\ln x}{x})'$$

$$u = \ln x;\ v = x;\ (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$u' = \frac{1}{x};\ v' = 1;$$

$$(\frac{\ln x}{x})' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$y' = y\cdot\frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

54 номер - Д 964

Пример:

$$y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$$
$$y' = ?$$

Решение:

$(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

$y = u + v;\ y' = u' + v';$
$u = (\sin x)^{\cos x};\ v = (\cos x)^{\sin x}$

$\ln u = \cos x \ln(\sin x)$
$\frac{u'}{u} = (\cos x)' \ln(\sin x) + \cos x(\ln(\sin x))' = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$
$u' = u(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$

$\ln v = \sin x \ln(\cos x)$
$\frac{v'}{v} = (\sin x)' \ln(\cos x) + \sin x(\ln(\cos x))' = \cos x \ln(\cos x) + \sin x(-\frac{\sin x}{\cos x})$
$v' = v(\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}) = (\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x})$

$y' = (\sin x)^{\cos x}(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}) + (\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x})$

57 номер - Д 984Б

Пример:

$y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$
$y' = ?$

Решение:

$y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$

$\ln y = \ln(\frac{x^2}{1-x}) + \ln((\frac{3-x}{(3+x)^2})^{\frac{1}{3}}) = (2\ln x - \ln(1-x)) + \frac{1}{3}(\ln(3-x) - 2\ln(3+x))$

$\frac{y'}{y} = (2\ln x - \ln(1-x))' + \frac{1}{3}(\ln(3-x) - 2\ln(3+x))'$
$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - (\ln(1-x))' + \frac{1}{3}(\frac{-1}{3-x} - 2 \cdot \frac{1}{3+x})$
$(\ln(1-x))' = \frac{(1-x)'}{1-x} = -\frac{1}{1-x}$
$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3-x} + \frac{2}{3+x})$

$y' = y(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3-x} + \frac{2}{3+x}))$

58 номер - Д 984В

Пример:

$y = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\dots(x-a_n)^{a_n}$
$y' = ?$

Решение:

$y = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\dots(x-a_n)^{a_n}$

$\ln y = \ln((x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\dots(x-a_n)^{a_n}) = \ln(x-a_1)^{a_1} + \ln(x-a_2)^{a_2} + \dots + \ln(x-a_n)^{a_n}$
$\ln y = a_1\ln(x-a_1) + a_2\ln(x-a_2) + \dots + a_n\ln(x-a_n)$

$\frac{y'}{y} = (a_1\ln(x-a_1) + a_2\ln(x-a_2) + \dots + a_n\ln(x-a_n))'$
$\frac{y'}{y} = \frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2}{x-a_2} + \dots + \frac{a_n}{x-a_n}$

$y' = y(\frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2}{x-a_2} + \dots + \frac{a_n}{x-a_n})$
$y' = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\dots(x-a_n)^{a_n}(\frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2}{x-a_2} + \dots + \frac{a_n}{x-a_n})$

61 номер - Д 985Б

Пример:

$y = \operatorname{arccot}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$
$y' = ?$

Решение:

$y = \operatorname{arccot}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$

$y = \operatorname{arccot}(u);\ y' = -\frac{u'}{1+u^2};$
$u = \frac{\phi(x)}{\psi(x)}$

$u = \frac{p}{q};\ u' = \frac{p'q - pq'}{q^2};$
$p = \phi(x);\ q = \psi(x)$

$u' = \frac{\phi'(x)\psi(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$
$1 + u^2 = 1 + \frac{\phi^2(x)}{\psi^2(x)} = \frac{\psi^2(x) + \phi^2(x)}{\psi^2(x)}$

$$y' = -\frac{\frac{\phi'\psi - \phi\psi'}{\psi^2}}{\frac{\psi^2+\phi^2}{\psi^2}} = -\frac{\phi'\psi - \phi\psi'}{\phi^2+\psi^2} = \frac{\phi\psi' - \phi'\psi}{\phi^2+\psi^2}$$

65 номер - Д 989

Пример:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$
$F(x)' = ?$

Решение:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

$$F(x) = x \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} + x^3 \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$F(x) = x(2x \cdot 6x - 3x^2 \cdot 2) - x^2(1 \cdot 6x - 0) + x^3(1 \cdot 2 - 0)$$
$$F(x) = x(12x^2 - 6x^2) - 6x^3 + 2x^3 = 6x^3 - 6x^3 + 2x^3 = 2x^3$$

$$F'(x) = 6x^2$$

69 номер - Д 1042

Пример:

Найти производные y'_x (параметры положительны)
$x = a\cosh t$
$y = b\sinh t$
$y'_x = ?$

Решение:

$x = a\cosh t;\ y = b\sinh t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$\frac{dx}{dt} = a(\cosh t)' = a\sinh t$$
$$\frac{dy}{dt} = b(\sinh t)' = b\cosh t$$

$$y'_x = \frac{b\cosh t}{a\sinh t} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cosh t}{\sinh t} = \frac{b}{a}\text{cth } t$$

73 номер - Д 1050

Пример:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (\textit{эллипс})$$
$$y'=?$$

Решение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$(\frac{x^2}{a^2})'+(\frac{y^2}{b^2})'=0$$
$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0$$
$$y'=-\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2y}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

77 номер - Д 1086

Пример:

$$y=\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{x}{a};(a\neq 0)$$

Решение:

$$a=\text{const};$$
$$y=\frac{1}{a}\operatorname{arccot}u;\ dy=\frac{1}{a}d(\operatorname{arccot}u);$$
$$d(\operatorname{arccot}u)=-\frac{1}{1+u^2}du;$$
$$u=\frac{x}{a};\ du=\frac{1}{a}dx;$$

$$dy=\frac{1}{a}(-\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot\frac{1}{a}dx)=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+x^2}dx=-\frac{dx}{a^2+x^2}$$

80 номер - Д 1088

Пример:

$$y=\ln|x+\sqrt{x^{2+a}}|$$

Решение:

$$a=\text{const};$$
$$y=\ln|u|;\ dy=\frac{du}{u};$$
$$u=x+\sqrt{x^{2+a}}$$

$$du=dx+d(\sqrt{x^{2+a}});$$
$$\sqrt{x^{2+a}}=(x^{2+a})^{\frac{1}{2}};$$

$d((x^{2+a})^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(x^{2+a})^{-\frac{1}{2}}d(x^{2+a});$
$d(x^{2+a}) = (2+a)x^{1+a}dx;$
$d(\sqrt{x^{2+a}}) = \frac{1}{2}(x^{2+a})^{-\frac{1}{2}}(2+a)x^{1+a}dx = \frac{2+a}{2}x^{\frac{a}{2}}dx;$

$du = (1 + \frac{2+a}{2}x^{\frac{a}{2}})dx;$
$dy = \frac{(1 + \frac{2+a}{2}x^{\frac{a}{2}})dx}{x + \sqrt{x^{2+a}}}$

81 номер - Д 1089

Пример:

$y = \arcsin\frac{x}{a}; (a \neq 0)$

Решение:

$a = \text{const};$
$y = \arcsin u;\ dy = d(\arcsin u);$
$d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du;$
$u = \frac{x}{a};\ du = \frac{1}{a}dx;$

$dy = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} \cdot \frac{1}{a}dx = \frac{dx}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$

84 номер - Д 1090В

Пример:

$d(\frac{1}{x^3})$

Решение:

$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$
$d(x^{-3}) = (-3)x^{-4}dx = -\frac{3}{x^4}dx$

85 номер - Д 1090Г

Пример:

$d(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})$

Решение:

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \ln x \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$d(uv) = u\,dv + v\,du;$
$u = \ln x;\ v = x^{-\frac{1}{2}}$

$du = \dfrac{1}{x}dx;$
$dv = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx;$

$$d(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}) = \ln x(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx) + x^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}dx) = (-\frac{\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})dx = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}dx$$

88 номер - Д 1093

Пример:

$$y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Решение:

$y = (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}}$
$dy = -\dfrac{1}{2}(u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}}d(u^2 + v^2)$

$d(u^2 + v^2) = d(u^2) + d(v^2) = 2u\,du + 2v\,dv;$
$dy = -\dfrac{1}{2}(u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}}(2u\,du + 2v\,dv) = -\dfrac{u\,du + v\,dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$

89 номер - Д 1094

Пример:

$$y = \mathrm{arccon}\frac{u}{v}$$

Решение:

$y = \mathrm{arccon}\,w;\ dy = d(\mathrm{arccon}\,w);$
$d(\mathrm{arccon}\,w) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - w^2}}dw;$
$w = \dfrac{u}{v}$

$dw = d(\frac{u}{v}) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2};$
$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{v})^2}} \cdot \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

92 номер - Д 1100

Пример:

$\sin 29^\circ \approx\ ?$

Решение:

$y = \sin x;$
$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6};$
$\Delta x = 29^\circ - 30^\circ = -1^\circ = -\frac{\pi}{180};$
$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x;$
$y' = \cos x;$

$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ(-\frac{\pi}{180}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,485;$

96 номер - Д 1103

Пример:

$lg11 \approx\ ?$

Решение:

$y = lgx;$
$x_0 = 10;\ \Delta x = 1;$
$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x;$
$(lgx)' = \frac{1}{x \ln 10};$

$lg11 \approx lg10 + \frac{1}{10 \ln 10} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{10 \ln 10} \approx 1,043;$

100 номер - Д 1105А

Пример:

$\sqrt[3]{9} \approx\ ?$

Решение:

$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1};$
$n = 3;\ a = 2;\ x = 1;\ (a > 0)$

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 2 + \frac{1}{12} \approx 2,083;$$

104 номер - РИСУНОК

105 номер - АНЕКДОТ

На одном корабле работал фокусник. Так как пассажиры постоянно менялись, он без перемены проделывал одни и те же фокусы. К его несчастью, капитанский попугай просмотрел его выступления достаточно раз, чтобы разгадать все секреты. Во время каждого выступления попугай портил все фокусы своими криками «Эта не та шляпа! Он прячет пиковую даму в кармане брюк! В коробке дырочка!». Фокусник сердился, но ничего поделать не мог, попугай всё-таки капитанский.
Однажды корабль потерпел кораблекрушение, и только фокусник с попугаем чудом выжили. Продолжали они плавать в море на каком-то бревне. Фокусник постоянно злобно смотрел на попугая, который в свою очередь не переставал смотреть на фокусника.
Наконец, через неделю дрейфа попугай не выдержал:
- Ну ладно, ладно, сдаюсь! Куда ты корабль засунул то?!

108 номер - Д 1133

Пример:

$y = x^x$
$d^2y = ?$

Решение:

$x =$ независимая; $d(dx) = 0;$
$y = x^x$

$\ln y = x \ln x$
$\frac{dy}{y} = d(x \ln x) = (x \ln x)' dx = (\ln x + 1) dx$
$dy = y(\ln x + 1) dx$

$d^2 y = d(dy) = d(y(\ln x + 1)dx) = d(y(\ln x + 1))dx$
$d(y(\ln x + 1)) = (\ln x + 1)dy + y\, d(\ln x + 1)$
$d(\ln x + 1) = \frac{1}{x} dx$
$d(y(\ln x + 1)) = (\ln x + 1)\, y(\ln x + 1)dx + y \cdot \frac{1}{x} dx = y((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x})dx$

$d^2 y = x^x ((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}) dx^2$

111 номер - Д 1142

Пример:

$x = a(t - \sin t)$
$y = a(1 - \cos t)$
$y''' = ?$

Решение:

$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$
$\frac{dy}{dt} = a \sin t$
$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

$y''_x = \frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\frac{dx}{dt}}$
$\frac{d}{dt}(\frac{\sin t}{1 - \cos t}) = \frac{(\cos t)(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{1 - \cos t}$
$y''_x = \frac{-\frac{1}{1 - \cos t}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$

$$y'''_x = \frac{\frac{d}{dt}(y''_x)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d}{dt}(-\frac{1}{a}(1-\cos t)^{-2}) = -\frac{1}{a}(-2)(1-\cos t)^{-3}\sin t = \frac{2\sin t}{a(1-\cos t)^3}$$

$$y'''_x = \frac{\frac{2\sin t}{a(1-\cos t)^3}}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin t}{a^2(1-\cos t)^4}$$

112 номер - Д 1143

Пример:

$x = e^t \cos t$
$y = e^t \sin t$
$y''' = ?$

Решение:

$x = e^t \cos t;\ y = e^t \sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t + e^t(-\sin t) = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$y'_x = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

$$y''_x = \frac{\frac{d}{dt}(y'_x)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}) = \frac{(\cos t - \sin t)(\cos t - \sin t) - (\sin t + \cos t)(-\sin t - \cos t)}{(\cos t - \sin t)^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}) = \frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}{(\cos t - \sin t)^2} = \frac{2}{(\cos t - \sin t)^2}$$

$$y''_x = \frac{\frac{2}{(\cos t - \sin t)^2}}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

$$y'''_x = \frac{\frac{d}{dt}(y''_x)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y''_x = 2e^{-t}(\cos t - \sin t)^{-3}$$

$$\frac{d}{dt}(y''_x) = 2((-e^{-t})(\cos t - \sin t)^{-3} + e^{-t}(-3)(\cos t - \sin t)^{-4}(-\sin t - \cos t))$$
$$\frac{d}{dt}(y''_x) = 2e^{-t}(-(\cos t - \sin t)^{-3} + 3(\sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)^{-4})$$
$$\frac{d}{dt}(y''_x) = \frac{2e^{-t}(-(\cos t - \sin t) + 3(\sin t + \cos t))}{(\cos t - \sin t)^4} = \frac{4e^{-t}(\cos t + 2\sin t)}{(\cos t - \sin t)^4}$$
$$y'''_x = \frac{\frac{4e^{-t}(\cos t + 2\sin t)}{(\cos t - \sin t)^4}}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{4(\cos t + 2\sin t)}{e^{2t}(\cos t - \sin t)^5}$$

115 номер - Д 1157

Пример:

$$y = \frac{a}{x^m}$$
$$y''' = ?$$

Решение:

$$y = ax^{-m};\ a, m = \text{const};$$

$$y' = a(-m)x^{-m-1}$$
$$y'' = a(-m)(-m-1)x^{-m-2}$$
$$y''' = a(-m)(-m-1)(-m-2)x^{-m-3} = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$$

116 номер - Д 1159

Пример:

$$y = \frac{x^2}{1-x}$$
$$y^{(8)} = ?$$

Решение:

$$y = \frac{x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$$
$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$((1-x)^{-1})' = (1-x)^{-2}$$
$$((1-x)^{-2})' = 2(1-x)^{-3}$$
$$((1-x)^{-3})' = 3 \cdot 2(1-x)^{-4}$$

$$((1-x)^{-1})^{(n)} = n!(1-x)^{-(n+1)};\ (n \geq 1)$$
$$(-x-1)^{(8)} = 0$$
$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}$$

119 номер - Д 1163

Пример:

$y = x \ln x$
$y^{(5)} = ?$

Решение:

$y = x \ln x$

$y' = (x \ln x)' = \ln x + 1$
$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$
$y''' = (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
$y^{(4)} = (-\frac{1}{x^2})' = \frac{2}{x^3}$
$y^{(5)} = (\frac{2}{x^3})' = -\frac{6}{x^4}$