3 номер – Д 420

Пример:

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

Решение:

$x = 1;$
$x^4 - 3x + 2 = 0;$
$x^5 - 4x + 3 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$(x-1);$
$x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) - 3(x-1) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 2);$
$x^5 - 4x + 3 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - 4(x-1) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3);$

$x \neq 1;$
$\dfrac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)} = \dfrac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 3} = \dfrac{1 + 1 + 1 - 2}{1 + 1 + 1 + 1 - 3} = \dfrac{1}{1} = 1;$

Ответ: 1

7 номер – Д 441

Пример:

$\lim_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$

Решение:

$x = -2;$
$\sqrt[3]{x-6} + 2 = 0;$
$x^3 + 8 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$(x+2);$
$(\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4) = x - 6 + 8 = x + 2;$
$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4);$

$x \neq -2;$
$\dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4}{\sqrt[3]{(x6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4} = \dfrac{x + 2}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} =$

$$= \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)} = \frac{1}{(4+4+4)(4+4+4)} = \frac{1}{144};$$

Ответ: $\frac{1}{144}$

11 номер – Д 446

Пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$$

Решение:

$x = 0;$
$\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2 = \sqrt[3]{8}-2 = 0;$
$x + x^2 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$a = \sqrt[3]{8+3x-x^2}$
$$a-2 = \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a^2+2a+4} = \frac{a^3-8}{a^2+2a+4}$$

$a^3-8 = (8+3x-x^2)-8 = 3x-x^2$
$$\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2} = \frac{3x-x^2}{(x+x^2)(a^2+2a+4)}$$

$x \neq 0;$
$3x-x^2 = x(3-x);\ x+x^2 = x(1+x)$
$$\frac{3x-x^2}{(x+x^2)(a^2+2a+4)} = \frac{x(3-x)}{x(1+x)(a^2+2a+4)} = \frac{3-x}{(1+x)(a^2+2a+4)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-x}{(1+x)(a^2+2a+4)} = \frac{3}{1\cdot(2^2+2\cdot 2+4)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

15 номер – Д 477

Пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

Решение:

$x = 0;$
$\cos x - \cos 3x = 1 - 1 = 0;$
$x^2 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\cos x - \cos 3x = -2\sin(\dfrac{x+3x}{2})\sin(\dfrac{x-3x}{2}) = -2\sin(2x)\sin(-x) = 2\sin(2x)\sin x;$
$x \neq 0;$
$\dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \dfrac{2\sin(2x)\sin x}{x^2} = 4 \cdot \dfrac{\sin(2x)}{2x} \cdot \dfrac{\sin x}{x};$

$\lim_{x \to 0} 4 \cdot \dfrac{\sin(2x)}{2x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4;$

Ответ: 4

19 номер – Д 507

Пример:

$\lim_{x \to \infty}(\dfrac{x+2}{2x-1})^{x^2}$

Решение:

$x \to \infty;$
$\dfrac{x+2}{2x-1} \to \dfrac{1}{2};$

$x > 1;$
$2x - 1 > 0;$
$\dfrac{x+2}{2x-1} > 0;$

$y = (\dfrac{x+2}{2x-1})^{x^2};$
$\ln y = x^2 \ln(\dfrac{x+2}{2x-1});$

$\ln(\dfrac{x+2}{2x-1}) \to \ln\dfrac{1}{2} < 0;$
$x^2 \to +\infty;$
$\ln y \to -\infty;$
$y \to 0;$

Ответ: 0

22 номер – Д 510

Пример:

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}+0}[\tan(\dfrac{\pi}{8} + x)]^{\tan 2x}$

Решение:

$x \to \frac{\pi}{4} + 0;$
$2x \to \frac{\pi}{2} + 0;$
$\tan 2x \to -\infty;$

$\frac{\pi}{8} + x \to \frac{3\pi}{8};$
$\tan(\frac{\pi}{8} + x) \to \tan \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1 > 1;$

$y = [\tan(\frac{\pi}{8} + x)]^{\tan 2x};$
$\ln y = \tan 2x \cdot \ln(\tan(\frac{\pi}{8} + x));$

$\ln(\tan(\frac{\pi}{8} + x)) \to \ln(\sqrt{2} + 1) > 0;$
$\tan 2x \to -\infty;$
$\ln y \to -\infty;$
$y \to 0;$

Ответ: 0

23 номер – Д 511

Пример:

$\lim_{x \to \infty} (\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})^{\frac{x-1}{x+1}}$

Решение:

$x \to \infty;$
$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1;$
$\frac{x - 1}{x + 1} \to 1;$
Вид 1^1

$y = (\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})^{\frac{x-1}{x+1}}$
$\ln y = \frac{x - 1}{x + 1} \ln(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})$

$x > 1;\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$
$\lim_{x \to \infty} \ln(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}) = \ln(\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0;$
$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x + 1} = 1;$
$\lim_{x \to \infty} \ln y = 1 \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} e^{\ln y} = e^0 = 1;$

Ответ: 1

26 номер – Д 514

Пример:

$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

Решение:

$x = 0;$
$\sqrt[x]{1-2x} = (1-2x)^{\frac{1}{x}};$
$1 - 2x = 1;$
Неопределённость 1^{∞}

$x \to 0;$
$1 - 2x > 0;$
$y = (1-2x)^{\frac{1}{x}};$
$\ln y = \dfrac{1}{x}\ln(1-2x);$

$u = -2x;$
$u \to 0;$
$\ln y = \dfrac{\ln(1+u)}{u} \cdot (-2);$
$\lim_{x\to 0} \ln y = 1 \cdot (-2) = -2;$
$\lim_{x\to 0} y = e^{-2};$

Ответ: e^{-2}

27 номер – Д 515

Пример:

$\lim_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^{x}$

Решение:

$x \to \infty;$
$\dfrac{x+a}{x-a} \to 1;$
Неопределённость 1^{∞}

$x \to \infty;$
$x - a > 0;$
$\dfrac{x+a}{x-a} > 0;$
$y = (\dfrac{x+a}{x-a})^{x};$
$\ln y = x\ln(\dfrac{x+a}{x-a}) = x\ln(1 + \dfrac{2a}{x-a});$

$u = \frac{2a}{x-a}$;
$u \to 0$;
$\ln y = \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot x \cdot \frac{2a}{x-a}$;
$\lim_{x\to\infty} \ln y = 1 \cdot 2a = 2a$;
$\lim_{x\to\infty} y = e^{2a}$;

Ответ: e^{2a}

30 номер – Д 519

Пример:

$\lim_{x\to 0} (\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$

Решение:

а)
$x = 0$;
$\frac{1+\tan x}{1+\sin x} = \frac{1+0}{1+0} = 1$;
Неопределённость 1^∞

$y = (\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$;
$\ln y = \frac{1}{\sin x} \ln(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})$;

$u = \frac{\tan x - \sin x}{1+\sin x}$;
$\frac{1+\tan x}{1+\sin x} = 1+u$;
$\ln y = \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot \frac{u}{\sin x}$;

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$;
$\frac{u}{\sin x} = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(1+\sin x)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin x(1+\sin x)} = \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{1+\sin x} = \frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}$;
$\lim_{x\to 0} \frac{u}{\sin x} = 0$;
$\lim_{x\to 0} \ln y = 1 \cdot 0 = 0$;
$\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$;

Ответ: 1

34 номер – Д 523

Пример:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

Решение:

$x \to \frac{\pi}{2};$
$\sin x \to 1;$
$\tan x \to \pm\infty;$
Неопределённость 1^{∞}

$t = x - \frac{\pi}{2};$
$t \to 0;$
$\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos t;$
$\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} + t) = -\cot t;$

$\cos t > 0$ при $t \to 0;$
$y = (\cos t)^{-\cot t};$
$\ln y = -\cot t \cdot \ln(\cos t);$

$u = \cos t - 1;$
$u \to 0;$
$\ln(\cos t) = \ln(1 + u);$
$\ln y = \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot (-\cot t) \cdot (\cos t - 1);$

$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1;$
$(-\cot t)(\cos t - 1) = -\frac{\cos t}{\sin t}(\cos t - 1) = \frac{(1-\cos t)\cos t}{\sin t} = \frac{2\sin^2(\frac{t}{2})\cos t}{2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})} = \sin(\frac{t}{2}) \cdot \frac{\cos t}{\cos(\frac{t}{2})};$
$\lim_{t\to 0}(-\cot t)(\cos t - 1) = 0;$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 1 \cdot 0 = 0;$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1;$

Ответ: 1

38 номер – Д 527

Пример:

$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^n$

Решение:

$n \to \infty;$
$\frac{n+1}{n-1} \to 1;$
$n \to \infty;$
Вид 1^{∞}

$y = (\frac{n+1}{n-1})^n$
$\ln y = n\ln(\frac{n+1}{n-1}) = n\ln(1 + \frac{2}{n-1})$

$t = \dfrac{2}{n-1};\ t \to 0+$
$n = \dfrac{2}{t} + 1$
$\ln y = (\dfrac{2}{t} + 1)\ln(1+t) = \dfrac{2}{t}\ln(1+t) + \ln(1+t)$

$t > 0;$
$\dfrac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t$
$\dfrac{2}{1+t} \le \dfrac{2}{t}\ln(1+t) \le 2$

$t \to 0+;$
$\dfrac{2}{1+t} \to 2;\ 2 \to 2$
$\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{2}{t}\ln(1+t) = 2$
$\lim\limits_{t\to 0+} \ln(1+t) = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln y = 2 + 0 = 2$
$\lim\limits_{n\to\infty} y = e^2$

Ответ: e^2

42 номер – Д 531

Пример:

$\lim_{x\to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a}; (a > 0)$

Решение:

$x = a;$
$\ln x - \ln a = 0;$
$x - a = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$a > 0;$
$x > 0;$
$\ln x - \ln a = \ln \dfrac{x}{a} = \ln(1 + \dfrac{x-a}{a});$

$h = x - a;$
$h \to 0;$
$y = \dfrac{\ln(1 + \frac{h}{a})}{h};$
$u = \dfrac{h}{a};$
$u \to 0;$
$y = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{\ln(1+u)}{u};$

$\lim_{x \to a} y = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a};$

Ответ: $\frac{1}{a}$

46 номер – Д 476

Пример:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

Решение:

$x = 0;$
$\sin 5x - \sin 3x = 0;$
$\sin x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\sin 5x - \sin 3x = 2\cos(\frac{5x+3x}{2})\sin(\frac{5x-3x}{2}) = 2\cos(4x)\sin x;$
$x \neq 0;$
$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \frac{2\cos(4x)\sin x}{\sin x} = 2\cos(4x);$

$\lim_{x \to 0} 2\cos(4x) = 2\cos 0 = 2;$

Ответ: 2

50 номер – Д 460

Пример:

$\lim_{x \to 0+}(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}})$

Решение:

$x \to 0+;$
$\frac{1}{x} \to +\infty;$

$t = \frac{1}{x};$
$t \to +\infty;$
$y = \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}} - \sqrt{t - \sqrt{t + \sqrt{t}}};$

$A = t + \sqrt{t + \sqrt{t}};$
$B = t - \sqrt{t + \sqrt{t}};$

$y = \sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \dfrac{2\sqrt{t + \sqrt{t}}}{\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}} + \sqrt{t - \sqrt{t + \sqrt{t}}}};$

$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{t} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{t}}};$
$t \to +\infty;$
$\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{t}}} \to 1;$
$\sqrt{t + \sqrt{t}} \sim \sqrt{t};$

$\dfrac{\sqrt{t + \sqrt{t}}}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{t}}} \to 0;$
$\sqrt{t \pm \sqrt{t + \sqrt{t}}} = \sqrt{t} \cdot \sqrt{1 \pm \dfrac{\sqrt{t + \sqrt{t}}}{t}} \sim \sqrt{t};$

$y \sim \dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{t} + \sqrt{t}} = \dfrac{2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = 1;$
$\lim_{x \to 0+} y = 1;$

Ответ: 1

53 номер – Д 496

Пример:

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x + \dfrac{\pi}{6})}$

Решение:

$x = \dfrac{\pi}{3};$
$\tan^3 x - 3\tan x = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = 0;$
$\cos(x + \dfrac{\pi}{6}) = \cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\tan^3 x - 3\tan x = \tan x(\tan^2 x - 3) = \tan x(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3});$
$x \neq \dfrac{\pi}{3};$
$\dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x + \dfrac{\pi}{6})} = \dfrac{\tan x(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3})}{\cos(x + \dfrac{\pi}{6})};$

$t = x - \dfrac{\pi}{3};\ t \to 0;$
$\cos(x + \dfrac{\pi}{6}) = \cos(t + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin t;$

$$\tan x-\sqrt{3}=\tan x-\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\cos x\cos(\frac{\pi}{3})}=\frac{\sin t}{\cos x\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\sin t}{\cos x};$$

$x\neq\frac{\pi}{3}$;

$$\frac{\tan x(\tan x-\sqrt{3})(\tan x+\sqrt{3})}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=\frac{\tan x\cdot\frac{2\sin t}{\cos x}\cdot(\tan x+\sqrt{3})}{-\sin t}=-2\cdot\frac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})}{\cos x};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}-2\cdot\frac{\tan x(\tan x+\sqrt{3})}{\cos x}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=-24;$$

Ответ: -24

54 номер – Д 498

Пример:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}$$

Решение:

$x=\frac{\pi}{4}$;
$1-\cot^3 x=1-1=0$;
$2-\cot x-\cot^3 x=2-1-1=0$;
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$u=\cot x;\ u\to 1$;
$$\frac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}=\frac{1-u^3}{2-u-u^3};$$
$1-u^3=(1-u)(1+u+u^2)$;
$2-u-u^3=-(u^3+u-2)=-(u-1)(u^2+u+2)=(1-u)(u^2+u+2)$;

$u\neq 1$;
$$\frac{1-u^3}{2-u-u^3}=\frac{(1-u)(1+u+u^2)}{(1-u)(u^2+u+2)}=\frac{1+u+u^2}{u^2+u+2};$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+u+u^2}{u^2+u+2}=\frac{1+1+1}{1+1+2}=\frac{3}{4};$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

57 номер – Д 501

Пример:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Решение:

$x = 0;$
$\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x} = 1 - 1 = 0;$
$\sin^2 x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$u = \cos x - 1;\ u \to 0$
$\sqrt{\cos x} = (1+u)^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{\cos x} = (1+u)^{\frac{1}{3}}$

$(1+u)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u\ (u \to 0)$
$(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2}u;\ (1+u)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \dfrac{1}{3}u$

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x} = \left((1+u)^{\frac{1}{2}} - 1\right) - \left((1+u)^{\frac{1}{3}} - 1\right) \sim (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})u = \frac{1}{6}u = \frac{1}{6}(\cos x - 1)$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2};\ \sin x \sim x;\ \sin^2 x \sim x^2$$

$$\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \sim \frac{\frac{1}{6}(\cos x - 1)}{\sin^2 x} \sim \frac{\frac{1}{6}(-\frac{x^2}{2})}{x^2} = -\frac{1}{12}$$

Ответ: $-\dfrac{1}{12}$

58 номер – Д 502

Пример:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

Решение:

$x = 0;$
$\sqrt{1-\cos x^2} = \sqrt{0} = 0;$
$1 - \cos x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$1 - \cos(x^2) \sim \dfrac{(x^2)^2}{2} = \dfrac{x^4}{2};$
$\sqrt{1-\cos x^2} \sim \sqrt{\dfrac{x^4}{2}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}};$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2};$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{2}}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$

Ответ: $\sqrt{2}$

61 номер – Д 505

Пример:

$\lim_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$

Решение:

$\sin A - \sin B = 2\cos(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2});$
$A = \sqrt{x+1},\ B = \sqrt{x};$
$\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = 2\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2});$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}};$
$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \to 0;$
$|\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})| \le 1;$
$\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}) \sim \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2};$

$|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}| \le 2\cdot|\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})| \sim 2\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to 0;$
$\lim_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0;$

Ответ: 0

65 номер – Д 547

Пример:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$

Решение:

$x = 0;$
$e^{\alpha x} - e^{\beta x} = 1 - 1 = 0;$
$\sin\alpha x - \sin\beta x = 0 - 0 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\alpha \neq \beta;$
$e^{\alpha x} - e^{\beta x} = e^{\beta x}(e^{(\alpha-\beta)x} - 1);$
$\sin \alpha x - \sin \beta x = 2\cos(\frac{(\alpha+\beta)x}{2})\sin(\frac{(\alpha-\beta)x}{2});$

$t = \frac{(\alpha-\beta)x}{2};\ t \to 0;$
$\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \frac{e^{\beta x}(e^{2t}-1)}{2\cos(\frac{(\alpha+\beta)x}{2})\sin t} = \frac{e^{\beta x}}{\cos(\frac{(\alpha+\beta)x}{2})} \cdot \frac{e^{2t}-1}{2t} \cdot \frac{t}{\sin t};$

$e^{\beta x} \to 1;$
$\cos(\frac{(\alpha+\beta)x}{2}) \to 1;$
$\frac{e^{2t}-1}{2t} \to 1;$
$\frac{t}{\sin t} \to 1;$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = 1;$

Ответ: 1

69 номер – Д 574

Пример:

$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$

Решение:

$x \to 1;$
$2 - x \to 1;$
$\sec\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \to \infty;$
Неопределённость 1^{∞}

$t = x - 1;\ t \to 0;$
$y = (1-t)^{\sec(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2})};$
$\ln y = \sec(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2})\ln(1-t);$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}) = -\sin(\frac{\pi t}{2});$
$\sec(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}) = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi t}{2})};$
$\ln y = -\frac{\ln(1-t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})} = (-\frac{\ln(1-t)}{t}) \cdot \frac{t}{\sin(\frac{\pi t}{2})};$

$-\dfrac{\ln(1-t)}{t} \to 1;$
$\dfrac{t}{\sin(\dfrac{\pi t}{2})} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\frac{\pi t}{2}}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \to \dfrac{2}{\pi};$
$\lim_{x\to 1} \ln y = \dfrac{2}{\pi};$
$\lim_{x\to 1} y = e^{2/\pi};$

Ответ: $e^{2/\pi}$

73 номер – Д 577

Пример:

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x}}{ch(x)}$

$ch(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$sh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
$th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

Решение:

$x \to +\infty;$
$sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x} \to \infty;$
$chx \to \infty;$
Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$

$A = \sqrt{x^2+x};\ B = \sqrt{x^2-x};$
$\dfrac{shA - shB}{chx} = \dfrac{\frac{1}{2}(e^A - e^{-A}) - \frac{1}{2}(e^B - e^{-B})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \dfrac{e^A - e^B + e^{-B} - e^{-A}}{e^x + e^{-x}};$

$\dfrac{shA - shB}{chx} = \dfrac{e^{A-x} - e^{B-x} + e^{-(B+x)} - e^{-(A+x)}}{1 + e^{-2x}};$
$x \to +\infty;$
$e^{-(B+x)} \to 0;$
$e^{-(A+x)} \to 0;$
$1 + e^{-2x} \to 1;$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{shA - shB}{chx} = \lim_{x\to+\infty}(e^{A-x} - e^{B-x});$

$A - x = \sqrt{x^2+x} - x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \to \dfrac{1}{2};$

$B - x = \sqrt{x^2-x} - x = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} \to -\dfrac{1}{2};$

$e^{A-x} \to e^{1/2}$;
$e^{B-x} \to e^{-1/2}$;
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x}}{ch(x)} = e^{1/2} - e^{-1/2} = 2sh(\dfrac{1}{2})$;

Ответ: $e^{1/2} - e^{-1/2}$

77 номер – Д 581

Пример:

$\lim_{x\to\infty} \arcsin \dfrac{1-x}{1+x}$

Решение:

$\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{x-1}{x+1} = -(1 - \dfrac{2}{x+1}) = -1 + \dfrac{2}{x+1}$;
$x \to \infty$;
$\dfrac{1-x}{1+x} \to -1$;
arcsin непрерывна на $[-1;1]$;
$\lim_{x\to\infty} \arcsin \dfrac{1-x}{1+x} = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$;

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}$

80 номер – Д 584

Пример:

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Решение:

$x \to -\infty$;
$\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$;
$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to -1$;

arccot берём со значениями в $(0;\pi)$;
$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccot}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$;

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$

81 номер – Д 585

Пример:

$\lim_{h\to0} \dfrac{\text{arccot}(x+h)-\text{arccot}x}{h}$

Решение:

$x = \text{const};$
$\text{arccot}\,t = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t;$

$$\frac{\text{arccot}(x+h)-\text{arccot}x}{h} = \frac{(\frac{\pi}{2}-\arctan(x+h))-(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{h} = -\frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h};$$

$y = \arctan(x+h),\ z = \arctan x;$
$\tan(y-z) = \dfrac{\tan y - \tan z}{1+\tan y \tan z} = \dfrac{(x+h)-x}{1+x(x+h)} = \dfrac{h}{1+x^2+xh};$
$y - z = \arctan(\dfrac{h}{1+x^2+xh});$

$u = \dfrac{h}{1+x^2+xh};\ u \to 0;$
$\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h} = \dfrac{\arctan u}{u}\cdot\dfrac{u}{h};$

$t = \arctan u;\ u = \tan t;$
$\dfrac{\arctan u}{u} = \dfrac{t}{\tan t} = \dfrac{t}{\sin t}\cdot\cos t \to 1;$
$\dfrac{u}{h} = \dfrac{1}{1+x^2+xh} \to \dfrac{1}{1+x^2};$
$\lim_{h\to0} \dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h} = \dfrac{1}{1+x^2};$
$\lim_{h\to0} \dfrac{\text{arccot}(x+h)-\text{arccot}x}{h} = -\dfrac{1}{1+x^2};$

Ответ: $-\dfrac{1}{1+x^2}$

84 номер – Д 590

Пример:

$\lim_{n\to\infty}[1+\dfrac{(-1)^n}{n}]^{\text{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$

Решение:

$a_n = (1+\dfrac{(-1)^n}{n})^{\text{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})};$
$n \geq 2;$
$1 + \dfrac{(-1)^n}{n} > 0;$
$\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) \neq 0;$
Неопределённость 1^∞

$\ln a_n = \operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2}) \cdot \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n});$

$\delta_n = \sqrt{1+n^2} - n = \frac{(1+n^2) - n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \sim \frac{1}{2n};$
$\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) = \sin(\pi(n+\delta_n)) = \sin(\pi n + \pi\delta_n) = (-1)^n \sin(\pi\delta_n);$
$\sin(\pi\delta_n) \sim \pi\delta_n;$
$\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) \sim (-1)^n \pi \cdot \frac{1}{2n} = (-1)^n \frac{\pi}{2n};$
$\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2}) = \frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})} \sim (-1)^n \frac{2n}{\pi};$

$\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n}) \sim \frac{(-1)^n}{n};$
$\ln a_n \sim ((-1)^n \frac{2n}{\pi}) \cdot (\frac{(-1)^n}{n}) = \frac{2}{\pi};$
$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \frac{2}{\pi};$
$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{2/\pi};$

Ответ: $e^{2/\pi}$

85 номер – Д 591

Пример:

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$

Решение:

$x \neq 0;$
$\frac{1}{x^{100}} e^{-1/x^2} = \frac{1}{(x^2)^{50}} e^{-1/x^2};$
$t = \frac{1}{x^2};\ t \to +\infty;$
$\frac{1}{(x^2)^{50}} e^{-1/x^2} = t^{50} e^{-t};$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{51}}{51!} + \cdots \geq \frac{t^{51}}{51!};\ (t > 0);$
$e^{-t} \leq \frac{51!}{t^{51}};$
$0 \leq t^{50} e^{-t} \leq t^{50} \cdot \frac{51!}{t^{51}} = \frac{51!}{t} \to 0;$
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-1/x^2} = 0;$

Ответ: 0

88 номер – Д 593Б

Пример:

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

Решение:

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x};$$
$x>0;$
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1};$$
$x\to+\infty;$
$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

89 номер – Д 594А

Пример:

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

Решение:

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\frac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}};$$
$x\to-\infty;$
$$\sqrt{x^2+x+1}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}};$$
$$\sqrt{x^2-x+1}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}};$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})}=-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$x\to-\infty;$
$$-\frac{2}{1+1}=-1;$$

Ответ: -1

92 номер – Д 1319

Пример:

$\lim_{x\to0}\frac{ch(x)-\cos x}{x^2}$

Решение:

$x = 0;$
$ch(x) - \cos x = 1 - 1 = 0;$
$x^2 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{ch(x) - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(ch(x) - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{sh(x) + \sin x}{2x};$
$x = 0;$
$sh(x) + \sin x = 0 + 0 = 0;$
$2x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{sh(x) + \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(sh(x) + \sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{ch(x) + \cos x}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1;$

Ответ: 1

96 номер – Д 1323

Пример:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cot x - 1}{x^2}$

Решение:

$x = 0;$
$x \cot x - 1 = 0;$
$x^2 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$x \neq 0;$
$x \cot x - 1 = x\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \dfrac{x \cos x - \sin x}{\sin x};$
$\dfrac{x \cot x - 1}{x^2} = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x};$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^2 \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x};$
$x \neq 0;$
$\dfrac{-x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \dfrac{-\sin x}{2 \sin x + x \cos x};$
$x = 0;$
$-\sin x = 0;$
$2 \sin x + x \cos x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2 \sin x + x \cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(-\sin x)'}{(2 \sin x + x \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\cos x}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3};$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$

100 номер – Д 1327

Пример:

$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

Решение:

$x = 0;$
$\arcsin 2x - 2\arcsin x = 0;$
$x^3 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin 2x - 2\arcsin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2};$$
$x = 0;$
$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$
$3x^2 = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8x}{(1-4x^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x}$$
$x = 0;$
$\frac{8x}{(1-4x^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} = 0;$
$6x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{8x}{(1-4x^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{8x}{(1-4x^2)^{3/2}} - \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}})'}{(6x)'} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{96x^2}{(1-4x^2)^{5/2}} - \frac{6x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{8}{(1-4x^2)^{3/2}} - \frac{2}{(1-x^2)^{3/2}}}{6} = \frac{8-2}{6} = 1;$$

Ответ: 1

104 номер – Д 1331

Пример:

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

Решение:

$x \to 0+;$
$\ln(\sin ax) \to -\infty;$
$\ln(\sin bx) \to -\infty;$
Неопределённость $\dfrac{-\infty}{-\infty}$

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$$
$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\big(\ln(\sin ax)\big)'}{\big(\ln(\sin bx)\big)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{a\cot(ax)}{b\cot(bx)} = \frac{a}{b}\lim_{x\to 0+} \frac{\cot(ax)}{\cot(bx)}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$
$$\frac{\cot(ax)}{\cot(bx)} = \frac{\cos(ax)\sin(bx)}{\sin(ax)\cos(bx)}$$

$\cos(ax)\sin(bx) \to 1\cdot 0 = 0;$
$\sin(ax)\cos(bx) \to 0\cdot 1 = 0;$
Неопределённость $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(ax)\sin(bx)}{\sin(ax)\cos(bx)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\big(\cos(ax)\sin(bx)\big)'}{\big(\sin(ax)\cos(bx)\big)'}$$

$$\big(\cos(ax)\sin(bx)\big)' = -a\sin(ax)\sin(bx) + b\cos(ax)\cos(bx)$$
$$\big(\sin(ax)\cos(bx)\big)' = a\cos(ax)\cos(bx) - b\sin(ax)\sin(bx)$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-a\sin(ax)\sin(bx) + b\cos(ax)\cos(bx)}{a\cos(ax)\cos(bx) - b\sin(ax)\sin(bx)} = \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$$

Ответ: 1

108 номер – Д 1335

Пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Arsh(sh(x)) - Arsh(\sin x)}{sh(x) - \sin x}$$

$$Arsh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Решение:

$x = 0;$
$Arsh(shx) - Arsh(\sin x) = 0;$
$shx - \sin x = 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{Arsh(shx) - Arsh(\sin x)}{shx - \sin x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(Arsh(shx) - Arsh(\sin x))'}{(shx - \sin x)'} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{chx}{\sqrt{1 + sh^2x}} - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{chx - \cos x};$

$x = 0;$

$\dfrac{chx}{\sqrt{1 + sh^2x}} - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = 0;$

$chx - \cos x = 0;$

Неопределённость $\frac{0}{0}$

$1 + sh^2x = ch^2x;$

$\sqrt{1 + sh^2x} = chx;$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{chx}{\sqrt{1 + sh^2x}} - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{chx - \cos x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{chx - \cos x};$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{chx - \cos x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}})'}{(chx - \cos x)'} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2 \sin x}{(1 + \sin^2 x)^{3/2}}}{shx + \sin x};$

$x = 0;$

$\dfrac{2 \sin x}{(1 + \sin^2 x)^{3/2}} = 0;$

$shx + \sin x = 0;$

Неопределённость $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2 \sin x}{(1 + \sin^2 x)^{3/2}}}{shx + \sin x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{(\dfrac{2 \sin x}{(1 + \sin^2 x)^{3/2}})'}{(shx + \sin x)'} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{2 \cos x \cos 2x}{(1 + \sin^2 x)^{5/2}}}{chx + \cos x} = \dfrac{2}{2} = 1;$

Ответ: 1

111 номер – Д 1338

Пример:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

Решение:

$x \to 0;$

$e^{-1/x^2} \to 0;$

$x^{100} \to 0;$
Неопределённость $\frac{0}{0}$

$x \neq 0;$
$t = \dfrac{1}{x^2};$
$t \to +\infty;$
$\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}} = \dfrac{e^{-t}}{(1/t)^{50}} = \dfrac{t^{50}}{e^t};$
Неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^{50}}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{(t^{50})'}{(e^t)'} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{50t^{49}}{e^t} = \dots = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{50!}{e^t} = 0;$
$\lim_{x\to0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = 0;$

Ответ: 0

112 номер – Д 1339

Пример:

$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-0,01x}$

Решение:

$x \to +\infty;$
$x^2 e^{-0,01x} = \dfrac{x^2}{e^{0,01x}};$
$\dfrac{x^2}{e^{0,01x}} = \dfrac{\infty}{\infty};$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{0,01x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2)'}{(e^{0,01x})'} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{0,01e^{0,01x}} = \dfrac{\infty}{\infty};$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{0,01e^{0,01x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(2x)'}{(0,01e^{0,01x})'} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{0,0001e^{0,01x}} = 0;$

Ответ: 0

115 номер – Д 1342

Пример:

$\lim_{x\to+0} x^x$

Решение:

$x \to 0+;$
$x^x = 0^0;$
Неопределённость 0^0

$y = x^x;$
$\ln y = x \ln x = \dfrac{\ln x}{1/x};$
$\dfrac{\ln x}{1/x} = \dfrac{-\infty}{\infty};$
$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \dfrac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0;$
$\lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1;$

Ответ: 1

116 номер – Д 1343

Пример:

$\lim_{x\to 0} x^{x^x - 1}$

Решение:

$x \to 0+;$
$x^{x^x-1} = 0^0;$
Неопределённость 0^0

$y = x^{x^x-1};$
$\ln y = (x^x - 1)\ln x = \dfrac{x^x - 1}{1/\ln x};$
$\dfrac{x^x - 1}{1/\ln x} = \dfrac{0}{0};$

$(x^x)' = x^x(\ln x + 1);$
$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \dfrac{(x^x - 1)'}{(1/\ln x)'} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{x^x(\ln x + 1)}{-1/(x(\ln x)^2)} = \lim_{x\to 0+}(-x^{x+1}(\ln x + 1)(\ln x)^2);$

$\lim_{x\to 0+} x^x = 1;$
$\lim_{x\to 0+} x^{x+1} = \lim_{x\to 0+} x \cdot x^x = 0;$

$\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0+} \dfrac{(\ln x)^2}{1/x} = \dfrac{\infty}{\infty};$
$\lim_{x\to 0+} \dfrac{(\ln x)^2}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{(2\ln x \cdot \frac{1}{x})}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0+}(-2x\ln x);$
$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \dfrac{-\infty}{\infty};$
$\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0;$
$\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^2 = 0;$

$\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^3 = \lim_{x\to 0+} \dfrac{(\ln x)^3}{1/x} = \dfrac{-\infty}{\infty};$
$\lim_{x\to 0+} \dfrac{(\ln x)^3}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{(3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x})}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0+}(-3x(\ln x)^2) = 0;$

$\lim_{x\to 0+} x(\ln x+1)(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0+}(x(\ln x)^3 + x(\ln x)^2) = 0;$
$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+}(-x^x) \cdot \lim_{x\to 0+} x(\ln x+1)(\ln x)^2 = -1 \cdot 0 = 0;$
$\lim_{x\to 0+} y = e^0 = 1;$

Ответ: 1

119 номер – Д 1348

Пример:

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

Решение:

$x \to \dfrac{\pi}{4};$
$\tan x \to 1;$
$\tan 2x \to \pm\infty;$
Неопределённость 1^∞

$y = (\tan x)^{\tan 2x};$
$\ln y = \tan 2x \cdot \ln(\tan x) = \dfrac{\ln(\tan x)}{\cot 2x};$
$\dfrac{\ln(\tan x)}{\cot 2x} = \dfrac{0}{0};$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(\ln(\tan x))'}{(\cot 2x)'} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2(2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (-\dfrac{\sin^2(2x)}{2\sin x \cos x});$
$\sin^2(2x) = 4\sin^2 x \cos^2 x;$
$-\dfrac{\sin^2(2x)}{2\sin x \cos x} = -2\sin x \cos x = -\sin 2x;$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \ln y = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1;$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} y = e^{-1};$

Ответ: e^{-1}