20 номер – П 2.2.8

Пример:

МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 27 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1\frac{7}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1\frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1\frac{7}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1\frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = -2;\ y = 2;\ z = 1;$

21 номер – П 2.2.9

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$\det A = 21 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{21} & \frac{11}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{21} & \frac{11}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -3;$

22 номер – П 2.2.9

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$\det A = 21 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{21} & \frac{11}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{21} & \frac{11}{21} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -3;$
:D

23 номер – П 2.2.10

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2(3 \cdot 0 - 2 \cdot 1) - 1(1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) + (-1)(1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 0$

$\det A = 0$; A^{-1} не существует

Ответ: решений нет

24 номер – П 2.2.11

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_1 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$\det A = 96 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{7}{48} & \frac{1}{12} \\ -\frac{13}{24} & -\frac{1}{96} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{7}{48} & \frac{1}{12} \\ -\frac{13}{24} & -\frac{1}{96} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{3}{8} \\ 2\frac{11}{16} \\ -1\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1\frac{3}{8};\ x_2 = 2\frac{11}{16};\ x_3 = -1\frac{1}{4};$

25 номер – П 2.2.12

Пример:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$R_2 = R_2 - R_1,\ R_3 = R_3 - R_1$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (a-1)^2 \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a-1)^2(a+2)$$

$a \neq 1,\ a \neq -2\ ;\ \det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} 1-a^2 \\ a-1 \\ (a-1)(a+1)^2 \end{pmatrix} = \left(\vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right. .$$

$a = 1; \det A = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = 1 - x_2 - x_3$

$a = -2; \det A = 0$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Решений нет

26 номер – П 2.2.13

Пример:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\det A = 17 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 & 6 \\ 8 & -53 & 43 & 4 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \\ -19 & 60 & -49 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 & 6 \\ 8 & -53 & 43 & 4 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \\ -19 & 60 & -49 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1;$

27 номер – П 2.2.14

Пример:

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 & 7 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 42 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = -6 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -52 & 12 & 24 & 14 \\ 34 & -9 & -15 & -8 \\ -60 & 18 & 24 & 18 \\ 104 & -27 & -45 & -28 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -52 & 12 & 24 & 14 \\ 34 & -9 & -15 & -8 \\ -60 & 18 & 24 & 18 \\ 104 & -27 & -45 & -28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 42 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = -3;\ x_3 = 2;\ x_4 = -1;$

28 номер – П 2.2.15

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 240 \neq 0$
A^{-1} существует

$$x = A^{-1}b = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;$

29 номер – П 2.2.27

Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 24 \neq 0$
A^{-1} существует

$$x = A^{-1}b = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;$