11 номер – П 1.1.51

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^n = ?$$

Решение:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = A$$
$$A^3 = A^2A = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = A^3A = A^2A = AA \ldots$$
$$\ldots$$
$$Ответ : A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13 номер – П 1.1.67

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 30 & -26 \\ 46 & 44 & -6 & 112 \\ 70 & -44 & -38 & -20 \\ 6 & 72 & -30 & -8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -9 \\ 8 & 7 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ -9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -30 & 72 & 6 \\ -20 & -38 & -44 & 70 \\ 112 & -6 & 44 & 46 \\ -26 & 30 & -26 & -10 \end{pmatrix}$$

$AB - BA \neq 0$
Ответ: Матрицы не коммутируют

15 номер – П 1.1.77

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Найти: AA^T; A^TA;

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix}$$

17 номер – П 1.2.64

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{pmatrix}$$

$\det A = ?$

Решение:

$$\det 2 \times 2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det A = x \cdot x^2 - (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - (x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1) = 1$$

19 номер – П 1.2.73

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$
$\det A = ?$

Решение:

$$\det 3 \times 3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$
$$\det A = (-2)(1 \cdot 2 - (-2)(-3)) - 3(4 \cdot 2 - (-2) \cdot 1) + 5(4 \cdot (-3) - 1 \cdot 1) = -87$$

21 номер – П 1.2.95

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$\det A = ?$

Решение:

$$\det A = 0 \cdot (\ldots) - 5 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot (\ldots)$$
$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 8(4 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 5(7 \cdot 0 - 1 \cdot 0) + 4(7 \cdot 1 - 4 \cdot 0) = 20$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 8(2 \cdot 0 - 1 \cdot 4) - 3(7 \cdot 0 - 1 \cdot 0) + 4(7 \cdot 4 - 2 \cdot 0) = 80$$

$$\det A = -5 \cdot 20 + 2 \cdot 80 = 60$$

23 номер – П 1.2.97

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
$\det A = ?$

Решение:

$$\det A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -8 & 5 & 10 \\ -8 & 5 & 8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 & 10 \\ 5 & -8 & 8 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 5 & -8 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 10 \\ -8 & 5 & 8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = -8(5 \cdot 7 - 8 \cdot 4) - 5((-8) \cdot 7 - 8 \cdot (-5)) + 10((-8) \cdot 4 - 5 \cdot (-5)) = -14$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = 9(5 \cdot 7 - 8 \cdot 4) - 5(5 \cdot 7 - 8 \cdot 6) + 10(5 \cdot 4 - 5 \cdot 6) = -8$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -8 & 10 \\ 5 & -8 & 8 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} = 9((-8) \cdot 7 - 8 \cdot (-5)) - (-8)(5 \cdot 7 - 8 \cdot 6) + 10(5 \cdot (-5) - (-8) \cdot 6) = -18$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 5 & -8 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = 9((-8) \cdot 4 - 5 \cdot (-5)) - (-8)(5 \cdot 4 - 5 \cdot 6) + 5(5 \cdot (-5) - (-8) \cdot 6) = -28$$

$$\det A = 3 \cdot (-14) - 2 \cdot (-8) + 2 \cdot (-18) - 2 \cdot (-28) = -6$$

25 номер – П 1.2.99

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$\det A = ?$

Решение:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&6&4\\2&3&2&2\\1&0&-1&0\\2&5&5&3\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}6&6&4\\3&2&2\\5&5&3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}3&6&4\\2&3&2\\2&5&3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}6&6&4\\3&2&2\\5&5&3\end{pmatrix}=2$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&4\\2&3&2\\2&5&3\end{pmatrix}=1$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&6&4\\2&3&2&2\\1&0&-1&0\\2&5&5&3\end{pmatrix}=2-1=1$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&5&4\\2&3&2&2\\1&0&1&0\\2&5&4&3\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}6&5&4\\3&2&2\\5&4&3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3&6&4\\2&3&2\\2&5&3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}6&5&4\\3&2&2\\5&4&3\end{pmatrix}=6(2\cdot3-2\cdot4)-5(3\cdot3-2\cdot5)+4(3\cdot4-2\cdot5)=1$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&5&4\\2&3&2&2\\1&0&1&0\\2&5&4&3\end{pmatrix}=1+2$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&5&6\\2&3&2&2\\1&0&1&-1\\2&5&4&5\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}6&5&6\\3&2&2\\5&4&5\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3&6&6\\2&3&2\\2&5&5\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3&6&5\\2&3&2\\2&5&4\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}6&5&6\\3&2&2\\5&4&5\end{pmatrix}=-1$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&6\\2&3&2\\2&5&5\end{pmatrix}=3$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&5\\2&3&2\\2&5&4\end{pmatrix}=2$$

$$\det\begin{pmatrix}3&6&5&6\\2&3&2&2\\1&0&1&-1\\2&5&4&5\end{pmatrix}=-1+3+2=4$$

$$\det A=3\cdot1+3\cdot2-4=5$$

27 номер – П 1.2.104

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{pmatrix}$$

$\det A = ?$

Решение:

Если $C_i = C_i + kC_j,\ \det A$ не меняется

$C_{n-1} = C_{n-1} + C_n,\ C_{n-2} = C_{n-2} + C_{n-1},\ \dots,\ C_0 = C_0 + C_1$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + \dots + a_n & a_1 + a_2 + \dots + a_n & \dots & a_{n-1} + a_n & a_n \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$\det A = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \cdot x \cdot x \cdots x = x^n (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$

29 номер – П 1.2.85

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \le 4$$

Решение:

$\det A = 2((x+5) \cdot 2 - (2-x) \cdot (-1)) - 0(1 \cdot 2 - (2-x) \cdot 3) + (-1)(1 \cdot (-1) - (x+5) \cdot 3) = 5(x+8)$

$5(x+8) \le 4$

$x + 8 \le \frac{4}{5}$

$x \le \frac{4}{5} - 8 = x \le -\frac{36}{5}$

Ответ: $x \le -\frac{36}{5}$

40 номер – П 1.4.42

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$A^{-1} = ?$

Решение:

$\det A = -104$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$C_{11} = +\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -13$$
$$C_{12} = -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -4$$
$$C_{13} = +\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$C_{21} = -\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -26$$
$$C_{22} = +\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 16$$
$$C_{23} = -\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$C_{31} = +\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 13$$
$$C_{32} = -\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -12$$
$$C_{33} = +\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -31$$

$$C = \begin{pmatrix} -13 & -4 & 7 \\ -26 & 16 & -2 \\ 13 & -12 & -31 \end{pmatrix}$$
$$C^T = \begin{pmatrix} -13 & -26 & 13 \\ -4 & 16 & -12 \\ 7 & -2 & -31 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T = -\frac{1}{104} C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{26} & -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} \\ -\frac{7}{104} & \frac{1}{52} & \frac{31}{104} \end{pmatrix}$$

42 номер – П 1.4.55

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$A \cdot X \cdot B = A$
$\det A \neq 0, \ \det B \neq 0 : \ A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}A$
$X = B^{-1}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$
$\det B = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) = 10 - 8 = 2$
$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

44 номер – П 1.4.57

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$A \cdot X = b$
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$\Delta = \det A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -7$

$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -15$

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 16$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 11$$

$$x_1 = \frac{-15}{-7} = \frac{15}{7}$$
$$x_2 = \frac{16}{-7} = -\frac{16}{7}$$
$$x_3 = \frac{11}{-7} = -\frac{11}{7}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$

46 номер – П 1.3.17

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}$$
$rankA = ?$

Решение:

$R_2 = R_2 + 2R_1,\ R_3 = R_3 + 4R_1$
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \\ 0 & -15 & 15 & -75 & 105 \end{pmatrix}$$

$R_3 = R_3 - 3R_2$
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ 0 & -5 & 5 & -25 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $rankA = 2$

48 номер – П 1.3.19

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$rankA = ?$

Решение:

$R_1 \to R_3$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 = R_2 - 5R_1,\ R_3 = R_3 - 3R_1,\ R_4 = R_4 - 7R_1$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix}$$

$R_3 = 3R_3 - 2R_2,\ R_4 = 3R_4 - 4R_2$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_4$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $rankA = 3$

50 номер – П 1.3.21

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$rankA = ?$

Решение:

$R_2 = R_2 - 2R_1,\ R_3 = R_3 - R_1,\ R_4 = R_4 - R_1,\ R_5 = R_5 - 2R_1$

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$R_3 = R_3 + R_2,\ R_4 = R_4 - 2R_2,\ R_5 = R_5 - 3R_2$

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $rankA = 2$

52 номер – П 1.3.23

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$rankA = ?$

Решение:

$M_1 = (3) = 3 \neq 0$

$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$

$\det A = 0$

Ответ: $rankA = 2$
Базисный минор: $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ \det M_2 = -5$

54 номер – П 1.3.35

Пример:

Как может измениться ранг матрицы при добавлении к ней одной произвольной строки? Одного произво

Решение:

$rankA = r$

Добавим одну строку: $A \to \tilde{A}$
$\tilde{r} = rank\tilde{A}$
Новая строка линейно выражается через старые строки ; $\tilde{r} = r$
Новая строка не выражается через старые строки ; $\tilde{r} = r + 1; \tilde{r} \in \{r,\ r+1\}$

Добавим один столбец: $A \to \hat{A}$
$\hat{r} = rank\hat{A}$
Новый столбец линейно выражается через старые столбцы ; $\hat{r} = r$
Новый столбец не выражается через старые столбцы ; $\hat{r} = r + 1$
$\hat{r} \in \{r,\ r+1\}$

Ответ: ранг либо не изменится, либо увеличится на 1 (уменьшиться не может).

56 номер – П 1.3.27

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$rankA =?$

Решение:

$R_2 = R_2 - 2R_1,\ R_3 = R_3 - 3R_1,\ R_4 = R_4 - 2R_1$
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 = 5R_3 - 4R_2,\ R_4 = 5R_4 + R_2$
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$R_4 = R_4 - R_3$
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $rankA = 3$

58 номер – П 1.3.29

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$rankA =?$

Решение:

$R_2 = R_2 - 2R_1,\ R_3 = R_3 - 3R_1,\ R_4 = R_4 - R_1$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_4$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & \lambda \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_3 = R_3 - 3R_2,\ R_4 = R_4 - 3R_2$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_4 = R_4 + R_3$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda - 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda \neq 3; \lambda - 3 \neq 0; rankA = 4$
$\lambda = 3; \lambda - 3 = 0; rankA = 3$

Ответ: $rankA = \begin{cases} 4, & \lambda \neq 3 \\ 3, & \lambda = 3 \end{cases}$